

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

П.В. Зубков, А.Е. Вестфальский, Д.А. Титов

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Методические указания

к выполнению лабораторных работ
по курсу «Оптимальное управление»
для студентов, обучающихся по направлению
01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Москва
Издательство МЭИ
2020

УДК
ББК
3

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»
в качестве учебного издания*

Подготовлено на кафедре математического и компьютерного
моделирования

Зубков, П.В.

З ??? Оптимальное управление: метод. указания / П.В. Зубков, А.Е.
Вестфальский, Д.А. Титов. – М.: Издательство МЭИ, 2020. – 24 с.

Содержит описания лабораторных работ по оптимальному управлению распределенными системами. Включены работы по оптимальному управлению процессами нагрева стержня и колебания струны. Продолжительность лабораторных занятий – 16 ч.

Для подготовки магистров по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика».

УДК
ББК

© Национальный исследовательский
университет «МЭИ», 2020

Содержание

Предисловие.....	4
1. Лабораторная работа № 1 «Оптимальное управление процессом нагрева стержня».....	5
1.1. Описание лабораторной работы.....	5
1.2. Варианты индивидуальных заданий.....	8
1.3. Вопросы и задачи к защите лабораторной работы.....	9
2. Лабораторная работа № 2 «Оптимальное управление процессом колебания струны».....	11
2.1. Описание лабораторной работы.....	11
2.2. Варианты индивидуальных заданий.....	13
2.3. Вопросы и задачи к защите лабораторной работы.....	14
3. Приложения.....	16
3.1. Разностные схемы для уравнения теплопроводности.....	16
3.2. Разностные схемы для уравнения колебаний струны.....	18
3.3. Аппроксимация краевых условий.....	19
3.4. Метод прогонки.....	20
3.5. Формула трапеций численного интегрирования.....	21
Список рекомендуемой литературы.....	23

Предисловие

Настоящая работа содержит методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Оптимальное управление» для магистров, обучающихся по образовательной программе «Математическое моделирование» направления «Прикладная математика и информатика».

Методические указания приводятся для двух лабораторных работ, посвященных оптимальному управлению процессами нагрева стержня и колебания струны. Включают в себя описание каждой лабораторной работы, варианты индивидуальных заданий, а также вопросы и задачи к защитах лабораторных работ. В приложениях для численного решения задач даются необходимые формулы и алгоритмы вычислительной математики.

1. Лабораторная работа №1

«Оптимальное управление процессом нагрева стержня»

1.1. Описание лабораторной работы

Имеется однородный стержень $0 \leq s \leq l$, левый конец $s = 0$ которого теплоизолирован, на правом конце $s = l$ происходит теплообмен с внешней средой, и кроме того, в стержне имеются источники (или стоки) тепла. Через $x = x(s, t)$ обозначим температуру стержня в точке s в момент t . Пусть $x(s, 0) = \varphi(s)$, $0 \leq s \leq l$ – распределение температуры в стержне в начальный момент $t = 0$. Требуется, управляя температурой внешней среды и плотностью источников тепла в стержне, к заданному моменту времени $T > 0$ распределение температуры в стержне сделать как можно ближе к заданному распределению $y(s)$, $0 \leq s \leq l$.

Математическая формулировка: требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^l |x(s, T, u) - y(s)|^2 ds$$

при условии, что $x = x(s, t, u)$ является решением краевой задачи

$$x_t = a^2 x_{ss} + f(s, t), \quad (s, t) \in Q = \{0 < s < l, 0 < t \leq T\},$$

$$x_s|_{s=0} = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

$$x_s|_{s=l} = \nu[p(t) - x(l, t)], \quad 0 < t \leq T,$$

$$x|_{t=0} = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l,$$

где a^2, l, ν, T – заданные положительные величины (определяются студентом самостоятельно); $p(t)$ – температура внешней среды, $f(s, t)$ – плотность источников тепла; предполагается, что $u = (p(t), f(s, t))$ – управление, принадлежащее множеству U , состоящему из пар $(p(t), f(s, t))$ таких, что

$p = p(t) \in L_2[0, T], p_{\min} \leq p(t) \leq p_{\max}$ почти всюду на $[0, T]$;

$$f = f(s, t) \in L_2(Q), \iint_Q |f(s, t)|^2 ds dt \leq R^2,$$

где $p_{\min} < p_{\max}$, $R > 0$ – заданные числа; $\varphi(s), y(s) \in L_2[0, l]$ (определяются студентом самостоятельно).

Обозначим $H = L_2[0, T] \times L_2(Q)$ – гильбертово пространство пар $u = (p(t), f(s, t))$ со скалярным произведением

$$\langle u_1, u_2 \rangle_H = \int_0^T p_1(t)p_2(t)dt + \iint_Q f_1(s, t)f_2(s, t)dsdt$$

и с нормой $\|u\|_H = (\langle u, u \rangle_H)^{1/2} = (\|p\|_{L_2}^2 + \|f\|_{L_2}^2)^{1/2}$.

Рассматриваемый функционал дифференцируем в H и его градиент имеет вид

$$J'(u) = (a^2 v \psi(l, t, u), \psi(s, t, u)) \in H,$$

причем первая компонента пары является «частной» производной функционала по переменной p , вторая компонента – по переменной f , где $\psi(s, t, u) = \psi(s, t)$ – обобщенное решение следующей вспомогательной краевой задачи:

$$\begin{aligned} \psi_t &= -a^2 \psi_{ss}, (s, t) \in Q, \\ \psi_s|_{s=0} &= 0, \psi_s|_{s=l} = -v \psi(l, t), 0 < t < T, \\ \psi|_{t=T} &= 2(x(s, T, u) - y(s)), 0 \leq s \leq l. \end{aligned}$$

Для получения градиента функционала при фиксированном $u \in H$ нужно решить две краевые задачи: сначала из основной краевой задачи надо определить функцию $x(s, t, u)$, затем, подставив получившееся $x(s, T, u)$ во вспомогательную краевую задачу, найти $\psi(s, t, u)$ и, наконец, полученное $\psi(s, t, u)$ подставить в формулу градиента.

Для численного решения задачи могут быть использованы методы проекции градиента и условного градиента (см. вариант индивидуального задания в табл. 1).

а) **Метод проекции градиента:** $\{u_k = (p_k(t), f_k(s, t))\}$

$$\begin{aligned} p_{k+1}(t) &= \\ &= \begin{cases} p_k(t) - \alpha_k a^2 v \psi(l, t, u_k) & \text{при } p_{\min} \leq p_k(t) - \alpha_k a^2 v \psi(l, t, u_k) \leq p_{\max}, \\ p_{\min} & \text{при } p_k(t) - \alpha_k a^2 v \psi(l, t, u_k) < p_{\min}, \\ p_{\max} & \text{при } p_k(t) - \alpha_k a^2 v \psi(l, t, u_k) > p_{\max}; \end{cases} \\ f_{k+1}(s, t) &= \\ &= \begin{cases} f_k(s, t) - \alpha_k \psi(s, t, u_k) & \text{при } I = \iint_Q |f_k(s, t) - \alpha_k \psi(s, t, u_k)|^2 ds dt \leq R^2, \\ \frac{R(f_k(s, t) - \alpha_k \psi(s, t, u_k))}{\left(\iint_Q |f_k(s, t) - \alpha_k \psi(s, t, u_k)|^2 ds dt\right)^{1/2}} & \text{при } I > R^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Выбор параметра α_k (**шаг спуска**) проводится с помощью одного из применимых в методе проекции градиента способов (см. вариант индивидуального задания в табл. 1):

1) α_k выбирается из условия

$$f_k(\alpha_k) = \inf_{\alpha \geq 0} f_k(\alpha), \quad f_k(\alpha) = J(P_U(u_k - \alpha J'(u_k)));$$

2) полагают $\alpha_k = \alpha > 0$, затем проверяют условие монотонности: $J(u_{k+1}) < J(u_k)$, и при необходимости дробят величину α , добиваясь выполнения условия монотонности;

3) если $J(u) \in C^{1,1}(H)$ и константа Липшица L для градиента известна, то в качестве α_k можно взять любое число, удовлетворяющее условиям

$$0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq 2/(L + 2\varepsilon),$$

где $\varepsilon, \varepsilon_0$ – положительные числа, являющиеся параметрами метода;

4) возможен выбор α_k из условия

$$J(u_k) - J(P_U(u_k - \alpha_k J'(u_k))) \geq \varepsilon \|u_k - P_U(u_k - \alpha_k J'(u_k))\|^2,$$

где $\varepsilon > 0$ (для определения такого α_k можно задать $\alpha_k = \alpha$ и затем дробить α до тех пор, пока не выполнится указанное неравенство);

5) возможно априорное задание величины α_k из условий

$$\alpha_k > 0, k = 0, 1, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty.$$

б) **Метод условного градиента:** $\{u_k = (p_k(t), f_k(s, t))\}$

$$p_{k+1}(t) = p_k(t) + \alpha_k(\bar{p}_k(t) - p_k(t)), 0 \leq t \leq T,$$

$$f_{k+1}(s, t) = f_k(s, t) + \alpha_k(\bar{f}_k(s, t) - f_k(s, t)), (s, t) \in Q,$$

где $\{\bar{u}_k = (\bar{p}_k(t), \bar{f}_k(s, t))\}$,

$$\bar{p}_k(t) = \begin{cases} p_{\min} & \text{при } \psi(l, t, u_k) \geq 0, \\ p_{\max} & \text{при } \psi(l, t, u_k) < 0, \end{cases} \bar{f}_k(s, t) = \frac{-R\psi(s, t, u_k)}{\left(\iint_Q |\psi(s, t, u_k)|^2 ds dt\right)^{1/2}},$$

а параметр $\alpha_k, 0 \leq \alpha_k \leq 1$, в методе условного градиента может быть выбран одним из указанных ниже приемов (см. вариант индивидуального задания в табл. 1):

1) α_k выбирается из условия

$$f_k(\alpha_k) = \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} f_k(\alpha) = f_{k*}, f_k(\alpha) = J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)).$$

В тех случаях, когда точное определение величины α_k из этого условия затруднительно, то можно пользоваться условием

$$f_k(\alpha_k) \leq f_{k*} + \delta_k, \delta_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty,$$

или

$$f_k(\alpha_k) \leq (1 - \lambda_k)f_k(0) + \lambda_k f_{k*}, 0 < \bar{\lambda} \leq \lambda_k \leq 1,$$

величины δ_k, λ_k здесь характеризуют погрешность выполнения условия 1).

2) Можно задать $\alpha_k = 1$, проверить условие: $J(u_{k+1}) < J(u_k)$, а затем при необходимости дробить α_k до тех пор, пока не выполнится это условие монотонности.

3) Если $J(u) \in C^{1,1}(U)$ и константа Липшица L для $J'(u)$ известна, то возможен выбор α_k из условия

$$\alpha_k = \min\{1, \rho_k |\langle J'(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle| \cdot \|\bar{u}_k - u_k\|^{-2}\},$$

где $0 < \varepsilon_0 \leq \rho_k \leq 2/(L + 2\varepsilon)$, $\varepsilon, \varepsilon_0$ – параметры метода, $\varepsilon > 0$.

4) Можно принять $\alpha_k = \lambda^{i_0}$, где i_0 – минимальный среди номеров, удовлетворяющих условию

$$J(u_k) - J(u_k + \lambda^i (\bar{u}_k - u_k)) \geq \lambda^i \varepsilon |\langle J'(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle|, i \geq 0,$$

где λ, ε – параметры метода, $0 < \lambda; \varepsilon < 1$.

5) Возможно априорное задание величины α_k из условий

$$0 \leq \alpha_k \leq 1, k = 0, 1, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = +\infty.$$

Последовательность $\{u_k\}$, построенная методом проекции градиента или методом условного градиента, является минимизирующей для рассматриваемой задачи и слабо в H сходится к множеству оптимальных управлений.

При численной реализации пользоваться разностными аналогами этих методов: встречающиеся интегралы вычисляются с помощью формул численного интегрирования (например, формулы трапеций), а при решении краевых задач пользоваться неявной разностной схемой в сочетании с прогонкой. Возможные критерии окончания:

$$\|u_k - u_{k+1}\| < \varepsilon, |J(u_k) - J(u_{k+1})| < \delta, \|J'(u_k)\| \leq \gamma.$$

Реализовать оптимальное управление в задаче по функции, указанной в варианте индивидуального задания (табл. 1), соответствующим методом минимизации с различными способами выбора шага спуска. Сравнить способы выбора шага спуска по числу итераций с разными вариантами входных данных. Объяснить полученные результаты.

Таблица 1

1.2. Варианты индивидуальных заданий

№	Метод минимизации	Управление	Номер способа выбора шага спуска	
1	проекция градиента	$p(t)$	1	2
2	условный градиент	$f(s, t)$	1	5
3	проекция градиента	$f(s, t)$	2	5
4	условный градиент	$p(t)$	2	3
5	проекция градиента	$p(t)$	1	5
6	условный градиент	$f(s, t)$	2	4
7	проекция градиента	$f(s, t)$	2	3

8	условный градиент	$p(t)$	3	5
9	проекция градиента	$p(t)$	2	4
10	условный градиент	$f(s, t)$	3	5
11	проекция градиента	$f(s, t)$	1	2
12	условный градиент	$p(t)$	4	5
13	проекция градиента	$p(t)$	2	5
14	условный градиент	$f(s, t)$	4	5
15	проекция градиента	$f(s, t)$	2	4
16	условный градиент	$p(t)$	1	5
17	проекция градиента	$p(t)$	2	3
18	условный градиент	$f(s, t)$	3	4
19	проекция градиента	$f(s, t)$	1	5
20	условный градиент	$p(t)$	2	5
21	проекция градиента	$p(t)$	4	5
22	условный градиент	$f(s, t)$	1	2
23	проекция градиента	$f(s, t)$	4	5
24	условный градиент	$p(t)$	2	4
25	проекция градиента	$p(t)$	3	4
26	условный градиент	$f(s, t)$	2	3
27	проекция градиента	$f(s, t)$	3	5
28	условный градиент	$p(t)$	1	2
29	проекция градиента	$p(t)$	3	5
30	условный градиент	$f(s, t)$	2	5

1.3. Вопросы и задачи к защите лабораторной работы

1. Вывод уравнения теплопроводности.
2. Неявная разностная схема для уравнения теплопроводности. Аппроксимация краевых условий.
3. Вывод основных формул численного интегрирования и априорных оценок погрешностей для них.
4. Метод проекции градиента. Условия сходимости метода.
5. Метод условного градиента. Условия сходимости метода.
6. Постановка задачи оптимального управления процессом нагрева стержня.
7. Дифференцируемость функционала в задаче оптимального управления процессом нагрева стержня. Градиент функционала.
8. Условие Липшица для градиента функционала в задаче оптимального управления процессом нагрева стержня. Константа Липшица.
9. Условие оптимальности в задаче оптимального управления процессом нагрева стержня.

10. Получение сопряженной краевой задачи.

11. Пусть B – банахово пространство, $J(u) \in C^2(B)$. Показать, что если в некоторой точке $u_* \in B$ выполняются условия

$$J'(u_*) = 0, \langle J''(u_*)h, h \rangle > 0 \quad \forall h \neq 0,$$

то этого, вообще говоря, еще недостаточно для того, чтобы в точке u_* достигался локальный или глобальный минимум функционала $J(u)$ на B . Указание: рассмотреть функционал

$$J(u) = \sum_{n=1}^{\infty} ((u^n)^2/n^3 - (u^n)^4), u \in l_2,$$

в точке $u_* = 0$ при $h = (0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, \dots)$.

12. Пусть A – линейный ограниченный самосопряженный оператор, действующий из гильбертова пространства H в H , $b \in H$. Если A – сильно положительный оператор, т.е. $\langle Au, u \rangle \geq \mu \|u\|^2, u \in H, \mu > 0$, то функционал $J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle$ является сильно выпуклым на H и на любом выпуклом замкнутом множестве $U \subset H$ достигает своей нижней грани на единственном элементе $u_* \in U$. Доказать.

13. Пусть P – линейное нормированное пространство всех алгебраических многочленов на отрезке $[0,1]$ с нормой $\|u(t)\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$. Положим $J(u) = \sum_{i=0}^n |\alpha_i|$ для $u = u(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i \in P$. Доказать, что $J(u)$ является выпуклым на P , но не является непрерывным на P . Указание: рассмотреть последовательность $u_k = u_k(t) = t^k - t^{k+1}, 0 \leq t \leq 1$. Будет ли $J(u)$ полунепрерывным снизу на P ?

14. Вычислить две итерации по методу проекции градиента для функции $J(u) = x^2 + xy + y^2$ при $u \in \{(x, y) \in E^2: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\}$, выбирая $u_0 = (1, -1), (-1, 0), (1, 0)$ или $(0, 0)$.

15. В рассмотренной задаче оптимального управления процессом нагрева стержня найти градиент функционала по каждой из переменных

$$\varphi(x) \in L_2[0, l], p(t) \in L_2[0, T], f(s, t) \in L_2(Q)$$

и по совокупности переменных

$$u = (\varphi(x), p(t), f(s, t)) \in H = L_2[0, l] \times L_2[0, T] \times L_2(Q).$$

16. В рассмотренной задаче оптимального управления процессом нагрева стержня изменить множество допустимых управлений U , заменив одно из условий на условие $p(t) \in L_2[0, T], \int_0^T |p(t) - \bar{p}(t)|^2 dt < R_0^2$, где число $R_0 > 0$ и $\bar{p}(t) \in L_2[0, T]$ заданы. Описать методы проекции градиента и условного градиента.

17. В рассмотренной задаче оптимального управления процессом нагрева стержня заменить условие на правом конце стержня на краевое условие первого рода $x(l, t) = p(t)$. Описать методы проекции градиента и условного градиента.

18. В рассмотренной задаче оптимального управления процессом нагрева стержня заменить условие на правом конце стержня на краевое условие второго рода $x_s(l, t) = p(t)$. Описать методы проекции градиента и условного градиента.

19. В задаче оптимального управления процессом нагрева стержня рассмотреть функционал

$$J(u) = \beta_0 \int_0^l |x(s, T, u) - y(s)|^2 ds + \beta_1 \int_0^T |p(t)|^2 dt + \beta_2 \iint_Q |f(s, t)|^2 ds dt,$$

считая $\beta_i = \text{const} > 0, i = 0, 1, 2; y(s) \in L_2[0, l]$. Доказать, что этот функционал сильно выпуклый на H ; найти его градиент; описать градиентный метод при $U = H$ и методы проекции градиента, условного градиента при рассматриваемых в задаче ограничениях.

20. В задаче оптимального управления процессом нагрева стержня рассмотреть функционал

$$J(p) = \int_0^l |x(s, T, u) - y(s)|^2 ds + \beta \int_0^T |p(t)|^2 dt, \beta = \text{const} > 0,$$

считая функцию $f(s, t) \in L_2(Q)$ заданной. Доказать, что управление $p_*(t)$ минимизирует функционал $J(p)$ тогда и только тогда, когда

$$H(p_*(t), \psi(l, t, p_*)) = \min H(p, \psi(l, t, p_*)), 0 \leq t \leq T,$$

где минимум берется по отрезку $p_{\min} \leq p \leq p_{\max}$,

$$H(p, \psi) = a^2 v p \psi + \beta p^2,$$

$\psi(s, t, p)$ – решение сопряженной краевой задачи.

2. Лабораторная работы № 2

«Оптимальное управление процессом колебания струны»

2.1. Описание лабораторной работы

Пусть имеется однородная гибкая струна, один конец которой свободен, на другой ее конец действует внешняя сила и, кроме того, к каждой точке струны также приложена внешняя сила. Требуется, управляя указанными внешними силами, к заданному моменту времени привести струну в положение, как можно меньше отличающееся от заданного.

Математическая формулировка: минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^l |x(s, T, u) - y(s)|^2 ds$$

при условиях

$$x_{tt} = a^2 x_{ss} + f(s, t), \quad (s, t) \in Q = \{0 < s < l, 0 < t < T\},$$

$$x_s(0, t) = p(t), x_s(l, t) = 0, 0 < t < T,$$

$$x(s, 0) = \varphi_0(s), x_t(s, 0) = \varphi_1(s), 0 \leq s \leq l,$$

$$u = (p(t), f(s, t)) \in U \subset H = L_2[0, T] \times L_2(Q),$$

где $a^2 > 0, l > 0, T > 0$ – заданные постоянные (определяются студентом самостоятельно); $y(s), \varphi_i(s), i = 0, 1, 0 \leq s \leq l$ – заданные функции (определяются студентом самостоятельно), причем $\varphi_0(s) \in W_2^1[0, l]$, $\varphi_1(s), y(s) \in L_2[0, l]$,

$$U = \left\{ (p(t), f(s, t)) \in H: \int_0^T |p(t)|^2 dt \leq R_0^2, \iint_Q |f(s, t)|^2 ds dt \leq R_1^2 \right\},$$

где $R_0 > 0, R_1 > 0$ – заданные постоянные (определяются студентом самостоятельно).

Рассматриваемый функционал дифференцируем в H и его градиент имеет вид

$$J'(u) = (a^2 \psi(0, t, u); -\psi(s, t, u)) \in H,$$

причем первая компонента пары является «частной» производной функционала по переменной p , вторая компонента – по переменной f , где $\psi(s, t, u) = \psi(s, t)$ – обобщенное решение следующей вспомогательной краевой задачи:

$$\psi_{tt} = a^2 \psi_{ss}, (s, t) \in Q,$$

$$\psi_s|_{s=0} = 0, \psi_s|_{s=l} = 0, 0 \leq t < T,$$

$$\psi|_{t=T} = 0, 0 \leq s \leq l,$$

$$\psi_t|_{t=T} = 2(x(s, T, u) - y(s)), 0 \leq s \leq l.$$

Для получения градиента функционала при фиксированном $u \in H$ нужно решить две краевые задачи: сначала из основной краевой задачи надо определить функцию $x(s, t, u)$, затем, подставив получившееся $x(s, T, u)$ во вспомогательную краевую задачу, найти $\psi(s, t, u)$ и, наконец, полученное $\psi(s, t, u)$ подставить в формулу градиента.

Для численного решения задачи могут быть использованы методы проекции градиента и условного градиента (см. вариант индивидуального задания в табл. 2).

а) **Метод проекции градиента:** $\{u_k = (p_k(t), f_k(s, t))\}$,
 $p_{k+1}(t) =$

$$= \begin{cases} p_k(t) - \alpha_k a^2 \psi(0, t, u_k) \text{ при } \int_0^T |p_k(t) - \alpha_k a^2 \psi(0, t, u_k)|^2 dt \leq R_0^2, \\ \frac{R_0(p_k(t) - \alpha_k a^2 \psi(0, t, u_k))}{\left(\int_0^T |p_k(t) - \alpha_k a^2 \psi(0, t, u_k)|^2 dt\right)^{1/2}} \text{ при } \int_0^T |p_k(t) - \alpha_k a^2 \psi(0, t, u_k)|^2 dt > R_0^2, \end{cases}$$

$$f_{k+1}(s, t) = \begin{cases} f_k(s, t) + \alpha_k \psi(s, t, u_k) \text{ при } \iint_Q |f_k(s, t) + \alpha_k \psi(s, t, u_k)|^2 ds dt \leq R_1^2, \\ \frac{R_1(f_k(s, t) + \alpha_k \psi(s, t, u_k))}{\left(\iint_Q |f_k(s, t) + \alpha_k \psi(s, t, u_k)|^2 ds dt\right)^{1/2}} \text{ иначе,} \end{cases}$$

где шаг спуска $\alpha_k > 0$ выбирается одним из способов, описанных в методе проекции градиента на стр. 6-7 (см. вариант индивидуального задания в табл. 2).

б) Метод условного градиента: $\{u_k = (p_k(t), f_k(s, t))\}$,

$$p_{k+1}(t) = p_k(t) + \alpha_k (\bar{p}_k(t) - p_k(t)),$$

$$f_{k+1}(s, t) = f_k(s, t) + \alpha_k (\bar{f}_k(s, t) - f_k(s, t)),$$

где $\{\bar{u}_k = (\bar{p}_k(t), \bar{f}_k(s, t))\}$,

$$\bar{p}_k(t) = -\frac{R_0 \psi(0, t, u_k)}{\left(\int_0^T |\psi(0, t, u_k)|^2 dt\right)^{1/2}}, \bar{f}_k(s, t) = \frac{R_1 \psi(s, t, u_k)}{\left(\iint_Q |\psi(s, t, u_k)|^2 ds dt\right)^{1/2}},$$

а величина α_k , $0 \leq \alpha_k \leq 1$, может быть выбрана одним из способов, указанных в методе условного градиента на стр. 7-8 (см. вариант индивидуального задания в табл. 2).

Последовательность $\{u_k\}$, построенная методом проекции градиента или методом условного градиента, является минимизирующей для рассматриваемой задачи и слабо в H сходится к множеству оптимальных управлений.

При численной реализации пользоваться разностными аналогами этих методов: встречающиеся интегралы вычислять с помощью формул численного интегрирования (например, формулы трапеций), а при решении краевых задач пользоваться неявной разностной схемой в сочетании с прогонкой. Возможные критерии окончания:

$$\|u_k - u_{k+1}\| < \varepsilon, |J(u_k) - J(u_{k+1})| < \delta, \|J'(u_k)\| \leq \gamma.$$

Реализовать оптимальное управление в задаче по функции, указанной в варианте индивидуального задания (табл. 2), соответствующим методом минимизации с различными способами выбора шага спуска. Сравнить способы выбора шага спуска по числу

итераций с различными вариантами входных данных. Объяснить полученные результаты.

Таблица 2

2.2. Варианты индивидуальных заданий

№	Метод минимизации	Управление	Номер способа выбора шага спуска	
1	условный градиент	$f(s, t)$	4	5
2	проекция градиента	$p(t)$	1	2
3	условный градиент	$p(t)$	1	3
4	проекция градиента	$f(s, t)$	1	5
5	условный градиент	$f(s, t)$	2	4
6	проекция градиента	$p(t)$	3	5
7	условный градиент	$p(t)$	1	5
8	проекция градиента	$f(s, t)$	1	2
9	условный градиент	$f(s, t)$	1	5
10	проекция градиента	$p(t)$	1	2
11	условный градиент	$p(t)$	4	5
12	проекция градиента	$f(s, t)$	2	3
13	условный градиент	$f(s, t)$	3	4
14	проекция градиента	$p(t)$	2	3
15	условный градиент	$p(t)$	3	5
16	проекция градиента	$f(s, t)$	2	4
17	условный градиент	$f(s, t)$	4	5
18	проекция градиента	$p(t)$	2	5
19	условный градиент	$p(t)$	2	3
20	проекция градиента	$f(s, t)$	1	4
21	условный градиент	$f(s, t)$	1	2
22	проекция градиента	$p(t)$	3	5
23	условный градиент	$p(t)$	2	3
24	проекция градиента	$f(s, t)$	1	5
25	условный градиент	$f(s, t)$	2	5
26	проекция градиента	$p(t)$	4	5
27	условный градиент	$p(t)$	2	4
28	проекция градиента	$f(s, t)$	4	5
29	условный градиент	$f(s, t)$	2	4
30	проекция градиента	$p(t)$	1	3

2.3. Вопросы и задачи к защите лабораторной работы

1. Вывод волнового уравнения.
2. Неявная разностная схема для волнового уравнения. Аппроксимация начальных и краевых условий.

3. Вывод основных формул численного интегрирования и априорных оценок погрешностей для них.
4. Метод проекции градиента. Условия сходимости метода.
5. Метод условного градиента. Условия сходимости метода.
6. Постановка задачи оптимального управления процессом колебания струны.
7. Дифференцируемость функционала в задаче оптимального управления процессом колебания струны. Градиент функционала.
8. Условие оптимальности в задаче оптимального управления процессом колебания струны.
9. Получение сопряженной краевой задачи.
10. Доказать, что функционал $J(u) = \|u - \bar{u}\|$ на любом выпуклом замкнутом множестве U рефлексивного банахова пространства достигает своей нижней грани (то есть существует проекция любой точки $u \in B$ на множество U или элемент наилучшего приближения из U для заданного элемента $\bar{u} \in B$).
11. Вычислить несколько итераций метода проекции градиента при различных способах выбора α_k для функции

$$J(u) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2, u \in U = \{u = (x, y) \in E^2: x \geq 0, y \geq 0\}.$$
 Рассмотреть начальные приближения $u_0 = (0,0)$, $u_0 = (0,1)$, $u_0 = (1,0)$ и $u_0 = (1,1)$.
12. Показать, что функционал $J(u)$ принадлежит множеству $C^{1,1}(H)$.
13. Найти градиент функционала $J(u)$ при управлении по (φ_0, φ_1) .
14. В рассмотренной задаче оптимального управления процессом колебания струны заменить условие на левом конце на краевое условие первого рода $x(0, t) = p(t)$. Описать методы проекции градиента и условного градиента.
15. Доказать сильную выпуклость на пространстве $H = L_2[0, l] \times L_2(Q)$ функционала

$$J_1(u) = J(u) + \beta_1 \int_0^T |p(t)|^2 dt + \beta_2 \iint_Q |f(s, t)|^2 ds dt,$$

где $\beta_i = \text{const} > 0, i = 1, 2$, а функционал $J(u)$ взят из рассматриваемой задачи оптимального управления процессом колебания струны при соответствующих ограничениях. Описать метод скорейшего спуска для задачи минимизации $J_1(u)$ на всем пространстве H .

16. В задаче оптимального управления процессом колебания стержня получить сопряженную краевую задачу.

17. Написать итерационные формулы методов проекции градиента и условного градиента для задачи оптимального управления процессом колебания стержня.

18. Пусть $U = \{u: u \in R, 0 \leq u < +\infty\}$. Рассмотреть задачи минимизации на множестве U функций $J(u) = u^2$, $J(u) = (1 + u)^{-1}$, $J(u) = 1$, $J(u) = u(1 + u^2)^{-1}$, $J(u) = u(1 + u^2)^{-1} + \alpha u$, $\alpha = \text{const} > 0$. Выяснить, какие из этих задач корректны и какие некорректны в естественной метрике $\rho(u, v) = |u - v|$.

19. Будет ли корректной задача минимизации на множестве $U = L_2[0, 1]$ функционала $J(u) = \int_0^1 u^2(t) dt$ в метрике $L_2[0, 1]$? $C[0, 1]$?

20. Рассмотреть задачу минимизации функции $x^2(1, u)$ при условиях:

$$\frac{dx}{dt} = u(t), 0 \leq t \leq 1; x(0) = 0; u = u(t) \in U,$$

где $U = \{u(t) \in L_2[0, 1]: |u(t)| \leq 1 \text{ почти всюду на } [0, 1]\}$. Будет ли эта задача корректно поставленной в метрике $C[0, 1]$? Указание: рассмотреть последовательность $u_k(t) = \sin kt$, $k = 1, 2, \dots$, $0 \leq t \leq 1$.

3. Приложения

3.1. Разностные схемы для уравнения теплопроводности

Для численного решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в прямоугольнике перейдем к дискретной задаче: заменим область изменения непрерывных аргументов конечным набором узлов – сеткой, а дифференциальное уравнение – разностной схемой (РС), то есть системой алгебраических уравнений, связывающих значения решения в узлах введенной сетки.

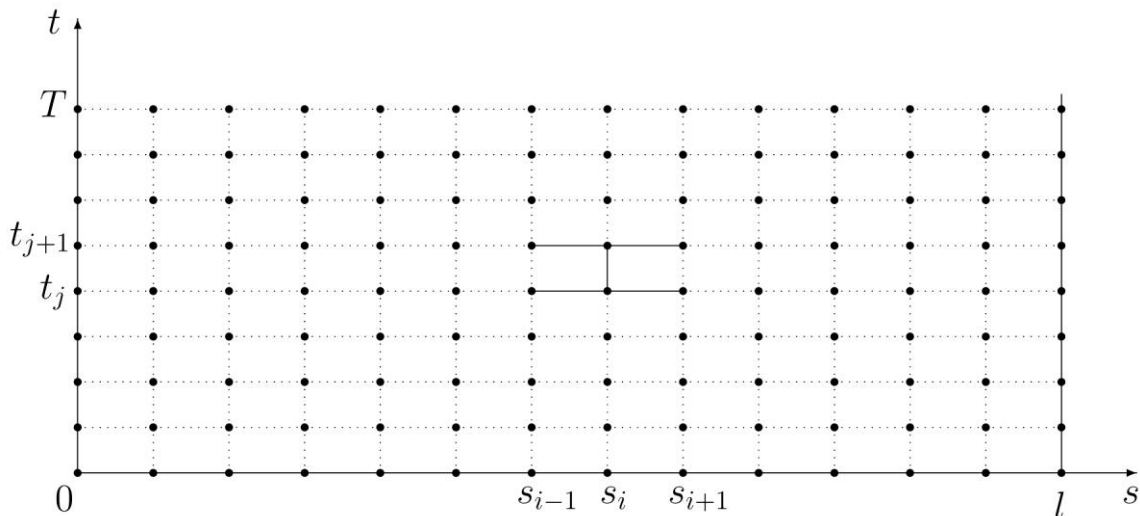


Рис. 1. Пространственно-временная сетка.

Для простоты рассмотрим сетку с постоянными шагами

$$\{(s_i, t_j) \mid s_i = i \cdot h, i = \overline{0, N}, h = l/N; t_j = j \cdot \tau, j = \overline{0, M}, \tau = T/M\},$$

изображенную на рис. 1. Обозначим через x_i^j приближение к $x(s_i, t_j)$. Более подробно о сеточных аппроксимациях см. [4].

Зафиксируем два соседних слоя, соответствующих моментам времени t_j и t_{j+1} . Для аппроксимации входящей в уравнение производной по времени воспользуемся простейшей двухточечной конструкцией

$$x_t(s_i, t) \approx \frac{x_i^{j+1} - x_i^j}{\tau}.$$

Заметим, что в зависимости от выбора точки $t \in [t_j, t_{j+1}]$ данная формула будет иметь разный порядок аппроксимации.

Производную по пространственной переменной аппроксимируем выражением

$$x_{ss}(s_i, t_j) \approx \frac{x_{i-1}^j - 2x_i^j + x_{i+1}^j}{h^2}.$$

Если составить аналогичное выражение для аппроксимации второй производной на следующем слое $x_{ss}(s_i, t_{j+1})$, а затем усреднить их (взять их комбинацию с коэффициентами σ и $(1 - \sigma)$, $\sigma \in [0, 1]$), то получится аппроксимация пространственной производной в узле $(s_i, \sigma t_{j+1} + (1 - \sigma)t_j)$.

Произведя указанные подмены в исходном дифференциальном уравнении приходим к семейству РС с весами

$$\frac{x_i^{j+1} - x_i^j}{\tau} = a^2 \left(\sigma \frac{x_{i-1}^{j+1} - 2x_i^{j+1} + x_{i+1}^{j+1}}{h^2} + (1 - \sigma) \frac{x_{i-1}^j - 2x_i^j + x_{i+1}^j}{h^2} \right) + F_i^j.$$

Выбор способа аппроксимации F_i^j правой части $f(s, t)$ уравнения тесно связан с выбором значений параметра $\sigma \in [0, 1]$.

Широко используются следующие частные случаи.

А) Чисто неявная РС ($\sigma = 1$).

$$\frac{x_i^{j+1} - x_i^j}{\tau} = a^2 \frac{x_{i-1}^{j+1} - 2x_i^{j+1} + x_{i+1}^{j+1}}{h^2} + f_i^{j+1}.$$

Эта схема имеет порядок точности $O(\tau + h^2)$ и абсолютно устойчива.

Б) Симметричная РС ($\sigma = 1/2$).

$$\frac{x_i^{j+1} - x_i^j}{\tau} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{x_{i-1}^{j+1} - 2x_i^{j+1} + x_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{x_{i-1}^j - 2x_i^j + x_{i+1}^j}{h^2} \right) + f_i^{j+1/2},$$

также известная как схема Кранка–Николсон (по имени мистера Дж. Кранка и миссис Ф. Николсон). Здесь использовано обозначение $f_i^{j+1/2} = f(s_i, \frac{t_j + t_{j+1}}{2})$. Данная схема имеет порядок точности $O(\tau^2 +$

$+h^2$) и также абсолютно устойчива.

В) Схема повышенного порядка точности.

При выборе $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ и специальной аппроксимации правой части уравнения получается абсолютно устойчивая РС порядка точности $O(\tau^2 + h^4)$. Ее формулы и свойства можно посмотреть, например, в [5].

Схема с весами при $\sigma > 0$ является неявной, поскольку на верхнем (исскомом) временно́м слое t_{j+1} в каждое уравнение входят три неизвестные.

Однако если записать уравнения схемы для всех внутренних точек искомого слоя (для $i = 1, \dots, N - 1$) и добавить к ним аппроксимацию граничных условий (об этом см. ниже), то получится система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, которую можно эффективно решить методом прогонки. Для упрощения записи обозначим $\mu = \frac{a^2\tau}{h^2}$, тогда при фиксированном значении j общее уравнение РС с весами на слое t_{j+1} перепишется в виде

$$\begin{aligned} -\mu\sigma x_{i-1}^{j+1} + (1 + 2\mu\sigma)x_i^{j+1} - \mu\sigma x_{i+1}^{j+1} = \\ = x_i^j + \mu(1 - \sigma)(x_{i-1}^j - 2x_i^j + x_{i+1}^j) + \tau F_i^j, \\ i = 1, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Если добавить еще два уравнения, аппроксимирующие граничные условия, то получится замкнутая система ($N + 1$ уравнение для $N + 1$ неизвестной).

Поскольку $\mu > 0$ и $\sigma > 0$, то матрица системы имеет строчное диагональное преобладание (модуль диагонального элемента каждой строки больше, чем сумма модулей всех внедиагональных элементов той же строки). Этого свойства достаточно для невырожденности матрицы, а также для устойчивости метода прогонки.

3.2. Разностные схемы для уравнения колебаний струны

В случае уравнения колебаний струны для аппроксимации производной по времени также необходимо использовать вторую разностную производную. В отличие от предыдущего рассмотрим только симметричную неявную аппроксимацию уравнения

$$\begin{aligned} \frac{x_i^{j+1} - 2x_i^j + x_i^{j-1}}{\tau^2} = \\ = \frac{a^2}{2} \left(\frac{x_{i-1}^{j+1} - 2x_i^{j+1} + x_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{x_{i-1}^{j-1} - 2x_i^{j-1} + x_{i+1}^{j-1}}{h^2} \right) + f_i^j. \end{aligned}$$

Построенная РС имеет порядок точности $O(\tau^2 + h^2)$.

Вводя параметр $\mu = \frac{a^2 \tau^2}{2h^2}$ можно переписать РС в форме

$$\begin{aligned} -\mu x_{i-1}^{j+1} + (1 + 2\mu)x_i^{j+1} - \mu x_{i+1}^{j+1} = \\ = 2x_i^j - x_i^{j-1} + \mu(x_{i-1}^{j-1} - 2x_i^{j-1} + x_{i+1}^{j-1}) + \tau^2 f_i^j, \\ i = 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

к которой также нужно добавить аппроксимацию граничных условий. Несложно убедиться, что матрица полученной системы имеет диагональное преобладание и, следовательно, она может быть разрешена методом прогонки.

В отличие от уравнения теплопроводности, построенная РС является трехслойной: для нахождения решения в момент времени t_{j+1} необходимо знать значения решения в моменты времени t_j и t_{j-1} . Это означает, что построенную РС нельзя использовать для нахождения решения на первом временно́м слое (при $t = t_1 = \tau$).

Для поиска решения на слое $t = t_1$ необходимо использовать оба начальных условия.

Повторим кратко вывод соответствующих уравнений. Напишем разложение в ряд Тейлора

$$x_i^1 \approx x(s_i, \tau) = x(s_i, 0) + x_t(s_i, 0)\tau + x_{tt}(s_i, 0)\frac{\tau^2}{2} + \bar{o}(\tau^2).$$

Заметим, что $x(s_i, 0) = \varphi_0(s_i)$ и $x_t(s_i, 0) = \varphi_1(s_i)$ заданы как начальные данные. Величину $x_{tt}(s_i, 0)$ можно выразить из дифференциального уравнения

$$x_{tt}(s_i, 0) = a^2 x_{ss}(s_i, 0) + f(s_i, 0),$$

где для вычисления $x_{ss}(s_i, 0)$ снова можно использовать вторую разностную производную. Окончательно получаем для расчета значений первого временно́го слоя формулу

$$x_i^1 = \varphi_0(s_i) + \varphi_1(s_i)\tau + \left(a^2 \frac{\varphi_0(s_{i-1}) - 2\varphi_0(s_i) + \varphi_0(s_{i+1}))}{h^2} + f(s_i, 0) \right) \frac{\tau^2}{2}.$$

Данная формула имеет порядок точности $O(\tau^2 + h^2)$.

3.3. Аппроксимация краевых условий

Для аппроксимации краевых условий третьего рода со вторым порядком точности можно использовать тот же подход, который был применен для поиска первого слоя в задаче о колебаниях струны.

Рассмотрим условие на левом конце $x_s|_{s=0} = p(t)$. Как известно,

$$x_s(0, t_j) \approx \frac{x(h, t_j) - x(0, t_j)}{h} - x_{ss}(0, t_j) \frac{h}{2} + \bar{o}(h).$$

Отбрасывая слагаемые большего порядка малости и учитывая условие $x_s(0, t) = p(t)$, получаем отсюда уравнение

$$p(t_j) = \frac{x_1^j - x_0^j}{h} - x_{ss}(0, t_j) \frac{h}{2}.$$

Далее следует выразить $x_{ss}(0, t_j)$ из исходного дифференциального уравнения и заменить входящую в полученное выражение производную по времени на сеточную аппроксимацию, соответствующую основному уравнению РС.

Начнем с задачи о колебаниях струны. Из уравнения получим

$$x_{ss}(0, t_j) = \frac{1}{a^2} (x_{tt}(0, t_j) - f(0, t_j)).$$

С учетом этого, а также заменяя сеточную производную на слое t_j полусуммой слоев t_{j+1} и t_{j-1} , получаем

$$p(t_j) = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^{j+1} - x_0^{j+1}}{h} + \frac{x_1^{j-1} - x_0^{j-1}}{h} \right) - \frac{h}{2a^2} (x_{tt}(0, t_j) - f(0, t_j)).$$

Производную по времени заменим сеточной аппроксимацией (как в основной РС) и окончательно имеем (снова $\mu = \frac{a^2 \tau^2}{2h^2}$)

$$-\left(\frac{1}{2} + \mu\right) x_0^{j+1} + \mu x_1^{j+1} = 2\mu h p_j - \mu (x_1^{j-1} - x_0^{j-1}) - x_0^j + \frac{1}{2} x_0^{j-1} - \frac{\tau^2}{2} f_0^j.$$

В случае уравнения теплопроводности напомним более общую двухслойную аппроксимацию

$$p(t_\sigma) = \sigma \frac{x_1^{j+1} - x_0^{j+1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{x_1^j - x_0^j}{h} - x_{ss}(0, t_\sigma) \frac{h}{2}.$$

где обозначено $t_\sigma = \sigma t_{j+1} + (1 - \sigma) t_j$. Для второй производной из основного уравнения получим

$$x_{ss}(0, t_\sigma) = \frac{1}{a^2} (x_t(0, t_\sigma) - f(0, t_\sigma)).$$

Наконец, аппроксимируя $x_t(0, t_\sigma)$ стандартной разностной производной по узлам t_j и t_{j+1} , окончательно имеем (здесь $\mu = \frac{a^2 \tau}{h^2}$)

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{2} + \mu\sigma\right) x_0^{j+1} + \mu\sigma x_1^{j+1} &= \\ &= \mu h p(t_\sigma) - \left(\frac{1}{2} - \mu(1 - \sigma)\right) x_0^j - \mu(1 - \sigma) x_1^j - \frac{\tau}{2} f(0, t_\sigma) \end{aligned}$$

Параметр σ следует выбирать таким же, как в основном уравнении РС.

3.4. Метод прогонки

Рассмотрим трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} b_0x_0 + c_0x_1 = d_0, \\ a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2 = d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2, \\ \dots \\ a_{N-1}x_{N-2} + b_{N-1}x_{N-1} + c_{N-1}x_N = d_{N-1}, \\ a_Nx_{N-1} + b_Nx_N = d_N. \end{cases}$$

Ее решение можно эффективно провести по следующим формулам.

Прямой ход:

$$\text{инициализация: } \alpha_0 = -\frac{c_0}{b_0}, \quad \beta_0 = \frac{d_0}{b_0},$$

основной цикл:

$$\gamma_i = b_i + a_i\alpha_{i-1}, \quad \alpha_i = -\frac{c_i}{\gamma_i}, \quad \beta_i = \frac{d_i - a_i\beta_{i-1}}{\gamma_i}, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Обратный ход:

$$\text{инициализация: } x_N = \frac{d_N - a_N\beta_{N-1}}{b_N + a_N\alpha_{N-1}},$$

$$\text{основной цикл: } x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad i = \overline{N-1, 0}.$$

Описанный алгоритм называют также правой прогонкой. В некоторых задачах бывает целесообразно находить неизвестные в обратном порядке. Соответствующий вариант расчетных формул (так называемая левая прогонка) имеет следующий вид

Прямой ход:

$$\text{инициализация: } \alpha_N = -\frac{a_N}{b_N}, \quad \beta_N = \frac{d_N}{b_N},$$

основной цикл:

$$\gamma_i = b_i + c_i\alpha_{i+1}, \quad \alpha_i = -\frac{a_i}{\gamma_i}, \quad \beta_i = \frac{d_i - c_i\beta_{i+1}}{\gamma_i}, \quad i = \overline{N-1, 1}.$$

Обратный ход:

$$\text{инициализация: } x_0 = \frac{d_0 - c_0\beta_1}{b_0 + c_0\alpha_1},$$

$$\text{основной цикл: } x_i = \alpha_i x_{i-1} + \beta_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

3.5. Формула трапеций численного интегрирования

Распространенным способом приближенного вычисления интегралов (определенных) является квадратурная формула трапеций.

Пусть требуется найти значение интеграла $I = \int_0^T f(t)dt$. Пусть, далее, подынтегральная функция $f(t)$ задана в узлах $t_j = j \cdot \tau$ ($j = \overline{0, M}$), $\tau = T/M$. Обозначим для краткости $f_j = f(t_j)$. Если на каждом элементарном отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ заменить точное значение интеграла –

площадь под графиком – на площадь трапеции, образованной отрезком прямой, соединяющим точки $(t_j, f(t_j))$ и $(t_{j+1}, f(t_{j+1}))$, а затем просуммировать такие приближения по всем элементарным отрезкам, то получится формула

$$I \approx I_{\text{тр}} = \tau \left(\frac{f_0 + f_M}{2} + \sum_{j=1}^{M-1} f_j \right).$$

Для дважды непрерывно дифференцируемых функций формула трапеций имеет второй порядок точности: $|I - I_{\text{тр}}| \leq C \tau^2$.

Для приближенного вычисления двойных интегралов можно аналогичным образом построить двумерную формулу трапеций. Пусть требуется найти значение интеграла $J = \int_0^T \int_0^l f(s, t) ds dt$. Пусть, как и выше, подынтегральная функция $f(s, t)$ задана в узлах $\{(s_i, t_j)\}$, где $s_i = i \cdot h$, $i = \overline{0, N}$, $h = \frac{l}{N}$; $t_j = j \cdot \tau$, $j = \overline{0, M}$, $\tau = T/M$. Обозначим для краткости $f_i^j = f(s_i, t_j)$. Кубатурная формула трапеций имеет вид

$$J \approx J_{\text{тр}} = \tau h \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M C_i^j f_i^j,$$

где веса C_i^j равны $\frac{1}{4}$ для угловых узлов сетки, $\frac{1}{2}$ для граничных не угловых и 1 для внутренних узлов сетки (см. рис. 1). В развернутом виде

$$J_{\text{тр}} = \tau h \left(\frac{f_0^0 + f_0^M + f_N^0 + f_N^M}{4} + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{f_0^j + f_N^j}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{f_i^0 + f_i^M}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} f_i^j \right).$$

Для дважды непрерывно дифференцируемых функций кубатурная формула трапеций также имеет второй порядок точности (по каждому шагу).

Список рекомендуемой литературы

1. Васильев, Ф.П. Методы решения экстремальных задач: учеб. пособ. / Ф.П. Васильев. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 400 с.
2. Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: учеб. пособ. для вузов / Ф.П. Васильев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 552 с.
3. Амосов, А.А. Вычислительные методы: учеб. пособ. / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. – 4-е изд., стер. – Лань Спб, 2014. – 672 с.
4. Казенкин, К.О. Численное решение задач математической физики. Нестационарные уравнения: учебно-методическое пособие / К.О. Казенкин, О.А. Амосова. – М.: Издательство МЭИ, 2016. – 36 с.
5. Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. – 552 с.

Учебное издание

Зубков Павел Валерьевич
Вестфальский Алексей Евгеньевич
Титов Дмитрий Анатольевич

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Методические указания

Редактор
Компьютерная верстка

Подписано в печать	??.??.2020	Печать цифровая	Формат 60×84/16
Печ. л. ??	Тираж ?? экз.	Изд. №	Заказ №

Оригинал – макет подготовлен в РИО НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14.
Отпечатано в типографии НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 13.